

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2024-2025  
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΦΟΙΤΗΣΗΣ  
(ΟΑΠ) ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΜΑΘΗΤΗΣ:ΧΡΙΣΤΟΥ ΑΝΤΩΝΗΣ Γ4

ΘΕΜΑ:ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ Ο ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ Φ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Η συμμετρία και ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  συνδέονται στενά τόσο στη φύση όσο και στην τέχνη, την αρχιτεκτονική και τα μαθηματικά. Ο χρυσός αριθμός  $\Phi$ , γνωστός και ως χρυσή τομή, ανακαλύφθηκε από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, όπως ο Πυθαγόρας και ο Ευκλείδης, και έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία αρμονικών αναλογιών και αισθητικά ευχάριστων σχημάτων.
- Στα μαθηματικά και την τέχνη, δύο ποσότητες έχουν την **χρυσή τομή** αν ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη.

# ΙΣΤΟΡΙΑ

- **1. Αρχαία Ελλάδα**
- Ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  ανακαλύφθηκε από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο **Ευκλείδης** (3ος αιώνας π.Χ.) περιέγραψε τη χρυσή τομή στο έργο του "Στοιχεία" ως τον λόγο δύο ποσοτήτων όπου ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με τον λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Ο **Πυθαγόρας** και οι ακόλουθοί του πίστευαν ότι η χρυσή τομή ήταν ένας ιερός αριθμός που αντιπροσώπευε την αρμονία και την ομορφιά του σύμπαντος.

- **2. Αρχαία Αίγυπτος**

- Πριν από τους Έλληνες, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν τη χρυσή τομή στην αρχιτεκτονική και την τέχνη. Η **Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζας** (2560 π.Χ.) πιστεύεται ότι περιέχει αναλογίες που σχετίζονται με τη χρυσή τομή, αν και αυτό είναι αντικείμενο συζήτησης μεταξύ των ειδικών.

- **3. Αναγέννηση**

- Κατά την Αναγέννηση, ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  έγινε δημοφιλής στους καλλιτέχνες και τους επιστήμονες. Ο **Λεονάρντο ντα Βίντσι** χρησιμοποίησε τη χρυσή τομή στα έργα του, όπως στο "Βιτρουβιανό Άνθρωπο", όπου οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος ακολουθούν αυτόν τον λόγο. Ο **Λούκα Πατσιόλι**, μαθηματικός και φίλος του ντα Βίντσι, έγραψε το βιβλίο "De Divina Proportione" (1509), το οποίο εξέτασε τη χρυσή τομή και την εφαρμογή της στην τέχνη και την αρχιτεκτονική.

## 5. Σύγχρονη Εποχή

- Σήμερα, ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  συνεχίζει να μελετάται και να εφαρμόζεται σε διάφορους τομείς, όπως η φωτογραφία, ο σχεδιασμός γραφικών, η αρχιτεκτονική και η φυσική. Επίσης, η σχέση του με την ακολουθία Fibonacci έχει οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στη βιολογία, τη φυσική και την επιστήμη των υπολογιστών.
- Συμπέρασμα
- Η ιστορία του χρυσού αριθμού  $\Phi$  είναι μια ιστορία μαθηματικής ανακάλυψης, καλλιτεχνικής έμπνευσης και φιλοσοφικής αναζήτησης για την αρμονία και την ομορφιά. Από την αρχαία Ελλάδα έως τη σύγχρονη εποχή, ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  παραμένει ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και μυστηριώδη μαθηματικά φαινόμενα.

# Η σχέση μεταξύ συμμετρίας και χρυσού αριθμού $\phi$

- **Ορισμός και μαθηματική έκφραση:**

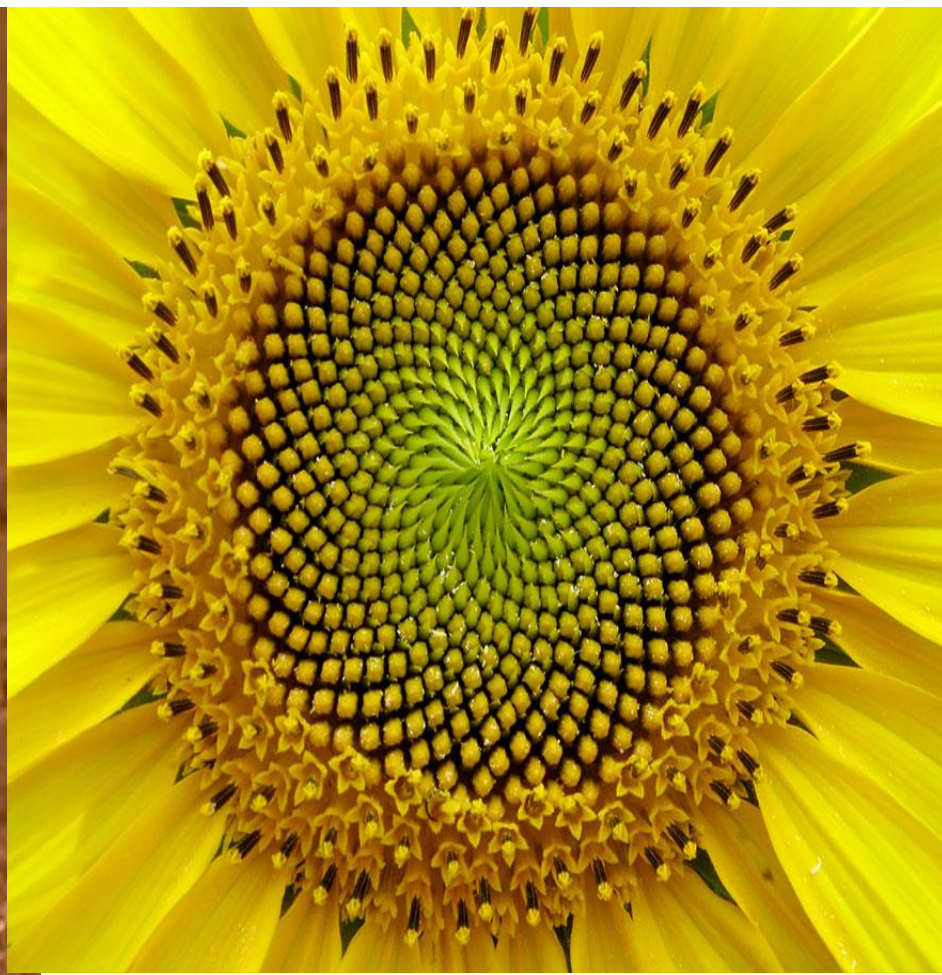
Ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  ορίζεται ως ο λόγος δύο ποσοτήτων όπου ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με τον λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται ως:

- Αυτός ο λόγος εμφανίζεται σε πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως η διάταξη των φύλλων στα φυτά, η δομή των κοχυλιών και η αναλογία των μελών του ανθρώπινου σώματος. ·

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi = 1,618$$

# Συμμετρία στη φύση:

Η χρυσή τομή συνδέεται με τη συμμετρία στη φύση. Για παράδειγμα, η διάταξη των πετάλων στα λουλούδια, η σπειροειδής μορφή των κοχυλιών και η αναλογία των μελών του ανθρώπινου σώματος ακολουθούν αυτόν τον λόγο. Ο Πυθαγόρας παρατήρησε ότι τα φυτά και τα ζώα αναπτύσσονται σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες, οι οποίοι συχνά περιλαμβάνουν τη χρυσή τομή<sup>38</sup>.

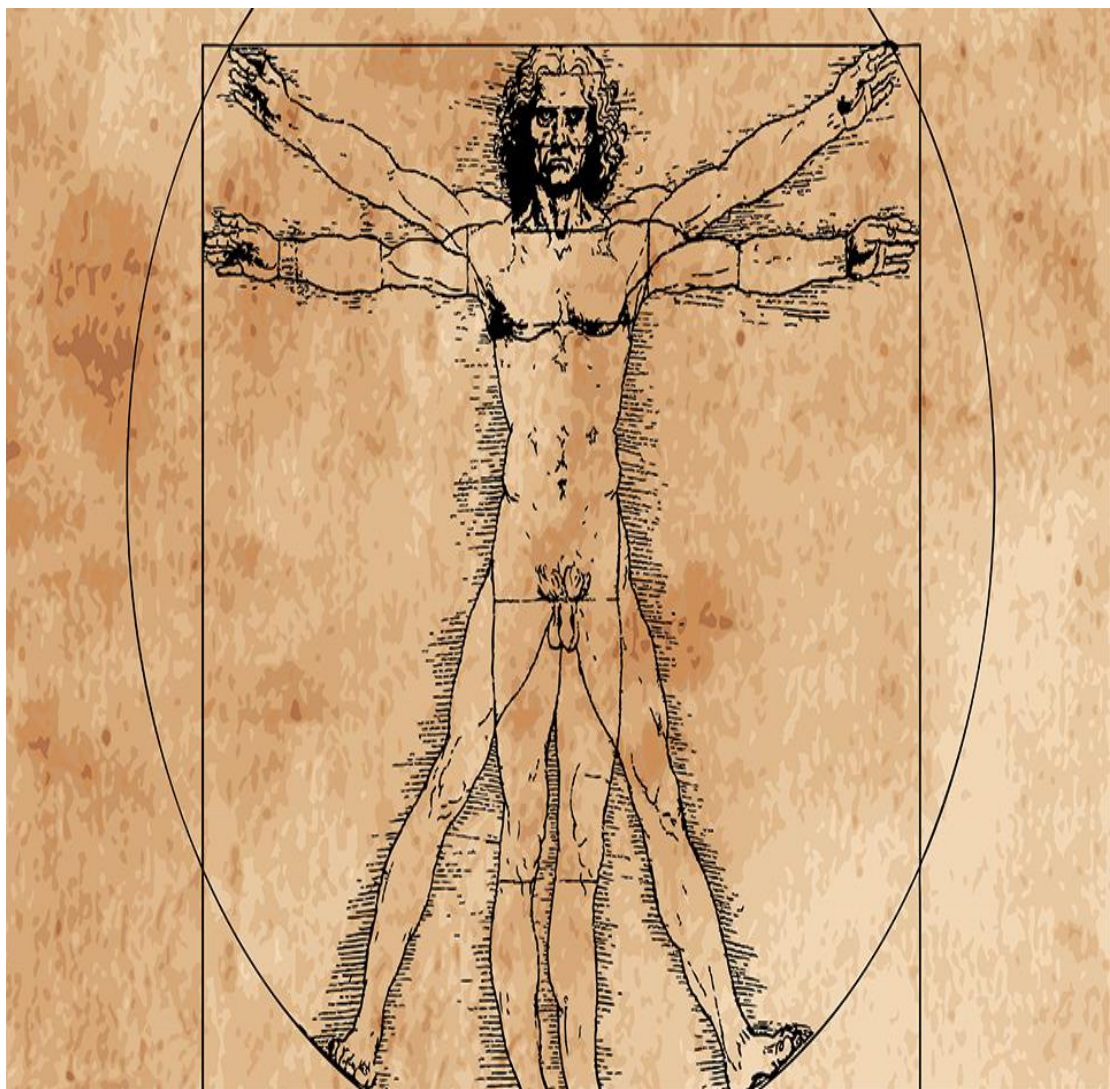




# Εφαρμογές στην τέχνη και την αρχιτεκτονική:

Ο χρυσός αριθμός  $\Phi$  χρησιμοποιήθηκε ευρέως στην αρχιτεκτονική και την τέχνη για τη δημιουργία αρμονικών και αισθητικά ευχάριστων έργων. Για παράδειγμα, ο Παρθενώνας στην Ακρόπολη της Αθήνας θεωρείται ότι έχει αναλογίες που βασίζονται στη χρυσή τομή. Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι χρησιμοποίησε τη χρυσή τομή στα έργα του, όπως στο "Βιτρουβιανό Άνθρωπο", όπου οι αναλογίες του σώματος ακολουθούν αυτόν τον λόγο<sup>1511</sup>.





## Σχέση με την ακολουθία Fibonacci:

Η χρυσή τομή συνδέεται στενά με την ακολουθία Fibonacci, όπου κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci πλησιάζει τον χρυσό αριθμό  $\Phi$  όσο η ακολουθία προχωρά. Αυτή η σχέση εμφανίζεται σε πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως η διάταξη των σπόρων στα ηλιοτρόπια και η δομή των φύλλων.

# Συμμετρία και αισθητική:

Η χρυσή τομή θεωρείται ότι δημιουργεί αισθητικά ευχάριστες αναλογίες, γι' αυτό και χρησιμοποιείται στη ζωγραφική, τη γλυπτική και την αρχιτεκτονική. Για παράδειγμα, η μάσκα της ομορφιάς, που βασίζεται στη χρυσή τομή, χρησιμοποιείται για να αναλύσει τις αναλογίες του ανθρώπινου προσώπου και να εξηγήσει γιατί κάποια πρόσωπα θεωρούνται πιο ελκυστικά.

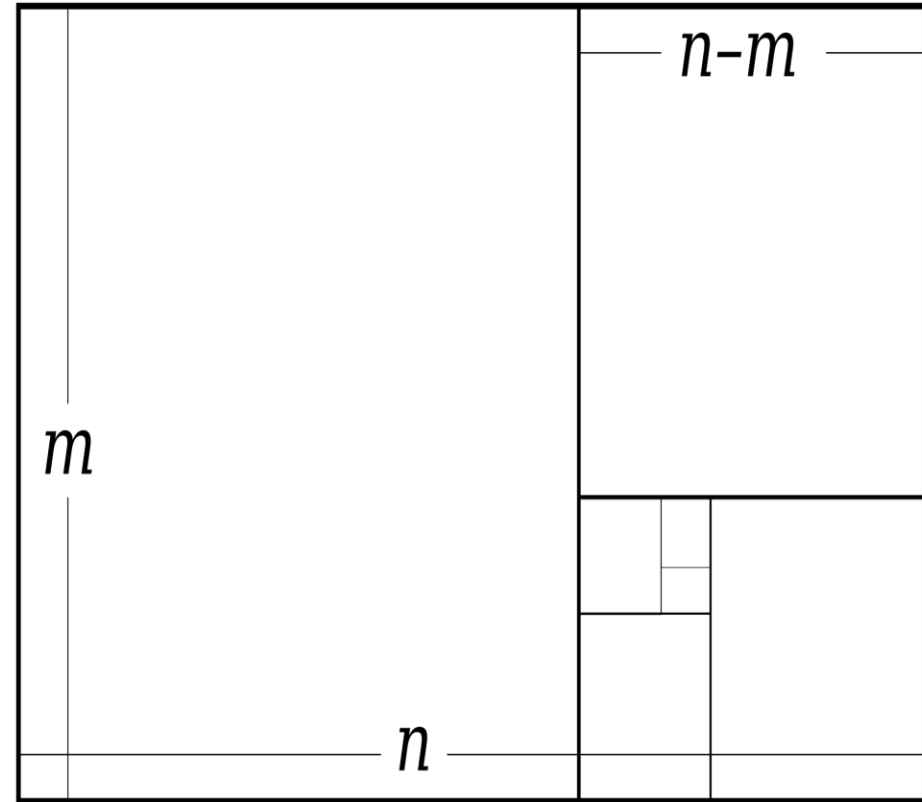
# Ο αριθμός $\phi$ στο ανθρώπινο σώμα

- Στην πραγματικότητα, το ίδιο το ανθρώπινο σώμα είναι χτισμένο γύρω από τον υπερβατικό αριθμό. Το μήκος του πρώτου τμήματος του ανθρώπινου δακτύλου (το πλησιέστερο προς το χέρι) διαιρούμενο με το μήκος του μεσαίου τμήματος, ισοδυναμεί με  $\Phi$ . Το ίδιο ισχύει και με τα δάχτυλα των ποδιών.

- Πως ο  $\Phi$  σχετίζεται με την τέλεια αρμονία τόσο στο πρόσωπο όσο και στο σώμα;
- Το ανθρώπινο σώμα έχει δομηθεί και αναπτύσσεται στις αναλογίες του αριθμού  $\Phi$ . Δεν είναι τυχαίο ότι πολλές ανατολικές θρησκείες και ομάδες που σχετίζονται με την αυτοσυγκέντρωση και την ψυχική αρμονία, για τον διαλογισμό, την εξάλειψη και την αποφυγή άγχους, όπως επίσης και στη ΓΙΟΓΚΑ, η στάση του σώματος καθορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο, έτσι ώστε τα “κεντρικά-κομβικά” σημεία του σώματος να είναι σύμφωνες με τον χρυσό κανόνα.
- Ο αριθμός  $\Phi$ , βρίσκεται στις διαστάσεις του σώματος, του προσώπου, του στόματος, των δοντιών, του προσώπου, των χειλιών και ακόμη και στο χαμόγελό μας.

# Το $\phi$ στα μαθηματικά

Αν το  $\phi$  ήταν ρητός, τότε θα ήταν ο λόγος πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές ακεραίους. Αλλά είναι επίσης ο λόγος των πλευρών, οι οποίες είναι επίσης ακέραιοι, του μικρότερου ορθογωνίου παραλληλογράμμου που θα προκύψει αν αφαιρέσουμε από το αρχικό σχήμα ένα τετράγωνο. Η φθίνουσα ακολουθία των ακεραίων που σχηματίζεται από την συνεχή αφαίρεση τετραγώνων, δεν μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον, και έτσι το  $\phi$  δεν μπορεί να είναι ρητός.





# Συμμετρίες

- Η χρυσή αναλογία και το αντίστροφο της χρυσής αναλογίας  $\phi_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  έχουν μια σειρά από συμμετρίες που διατηρούν και διαπλέκουν αυτές τις αναλογίες. Και οι δύο διατηρούνται από τις κλασματικές γραμμικές συναρτήσεις  $x, 1/(1-x), (x-1)/x,$  - το γεγονός αυτό αντιστοιχεί στην ταυτότητα και τον ορισμό της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Περαιτέρω, εναλλάσσονται με τις :  $1/x, 1-x, x/(x-1)$ - που είναι αντίστροφες, συμμετρικές στο  $1/2$ , και (προβολικά) συμμετρικές στο  $2$ .
- Αναλύοντας βαθύτερα, αυτές οι συναρτήσεις σχηματίζουν μια υποομάδα της ομάδας πηλίκου  $PSL(2, Z)$  ισόμορφη με την συμμετρική ομάδα  $S_3$ , που αντιστοιχεί στον σταθεροποιητή του συνόλου  $\{0, 1, \infty\}$  των 3 βασικών σημείων της προβολικής ευθείας, και οι συμμετρίες αντιστοιχούν στην ομάδα πηλίκου  $S_3 \rightarrow S_2$  -η υποομάδα  $C_3 \subset S_3$ - αποτελείται από το 3-κύκλους και η ταυτότητα  $(\ ) (01\infty)(0\infty 1)$  καθορίζει τους δύο αριθμούς, ενώ οι 2 κύκλοι εναλλάσσουν αυτούς, υλοποιώντας έτσι το χάρτη.

# Συμμετρία στο Σύμπαν

- Αυτή η συμμετρία, που ονομάζεται «**σύμμορφη**» **συμμετρία**, σημαίνει ότι ούτε το φως ούτε τα σωματίδια χωρίς μάζα βιώνουν στην πραγματικότητα τη συρρίκνωση του χώρου κατά το Big Bang. Αξιοποιώντας αυτή τη συμμετρία, μπορεί κανείς να ακολουθήσει το φως και τα σωματίδια μέχρι την αρχή.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΕΙΑ

- [Χρυσή τομή - Βικιπαίδεια](#)
- [Microsoft Word - SYMMETRY.doc](#)
- [Η Χρυσή Τομή Φ – ΖΗΣΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΟΥ](#)
- [Ο «χρυσός» αριθμός Φ: Πως η αρμονία τέχνης και μαθηματικών συνδέονται με ένα απλό κλάσμα](#)
- [Ο ΑΡΙΘΜΟΣ Φ ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΦΥΣΗ | PPT](#)
- [Συμμετρία](#)